$P(z)=0 \Leftrightarrow z=1$ ou (*) $z^2-a(1+i)z+ia^2=0$

Résolution de (*) : $\Delta=a^2(1+i)^2-4ia^2=a^2(-2i)=a^2(1-i)^2$

d'où $z'=\dfrac{a(1+i)-a(1-i)}{2}=ai$ et $z''=\dfrac{a(1+i)+a(1-i)}{2}=a$

$S_{\mathbb{C}}=\{1, ai, a\}$

c) ABC est un triangle équilatéral si et seulement si :

$z_A+jz_B+j^2z_C=0$ ou $z_A+j^2z_B+jz_C=0$

$z_A+jz_B+j^2z_C=0 \Leftrightarrow 1+iaj+aj^2=0 \Leftrightarrow a(j^2+ij)=-1 \Leftrightarrow a=\dfrac{-1}{j(i+j)}$

$z_A+j^2z_B+jz_C=0 \Leftrightarrow 1+j^2ai+aj=0 \Leftrightarrow a(j+ij^2)=-1 \Leftrightarrow a=\dfrac{-1}{j(1+ij)}$

Les différentes valeurs possibles de a répondant à la question posée sont : $\dfrac{-1}{j(i+j)}$; $\dfrac{-1}{j(1+ij)}$

Solution 24 :

1°/a) Soit $z_0 = yi$ où $y \in \mathbf{R}$ z_0 est une racine de E si :

$-y^3 i -2(1-i) y^2 +(1+ m^2 -4i)yi -2i(1+m^2) = 0$

$\Leftrightarrow -y^3 i -2y^2 +2y^2 i +(1+ m^2)yi +4y -2i(1+m^2) = 0$

$\Leftrightarrow -2y^2 +4y +i[(-y^3 +2y^2 +y(1+ m^2) - 2(1+m^2)] = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y(2-y)=0 & (1) \\ -y^3+2y^2+y(1+m^2)-2(1+m^2)=0 & (2) \end{cases}$

(1) s'écrit : y = 0 ou y = 2 or y = 0 ne vérifie pas (2)

y = 2 vérifie l'équation (2)

Conclusion : $z_0 = 2i$

b) (E) s'écrit : $(z - 2i)(az^2 +bz +c) =0$

$\Leftrightarrow az^3 + (b-2ai) z^2 + (c-2ib) z -2ic = 0$ donc on a :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2ai=2(1-i) \\ c-2ib=1+m^2-4i \\ -2ic=-2i(1+m^2) \end{cases}$$